

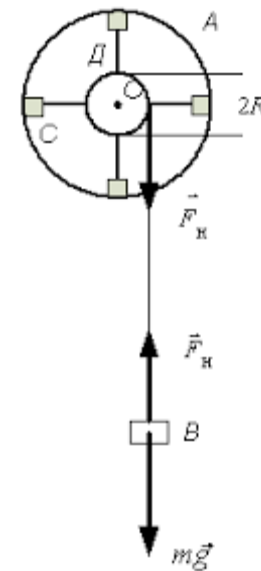
**Динамика.**  
**Законы Ньютона.**  
**Основной закон динамики**  
**вращательного движения.**  
**Законы сохранения**

# Основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt,$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots$$



**Задача 1.** С каким ускорением следует опускать на веревке груз массой 45 кг, чтобы она не оборвалась? Веревка выдерживает максимальное натяжение 410 Н.

**Решение.**

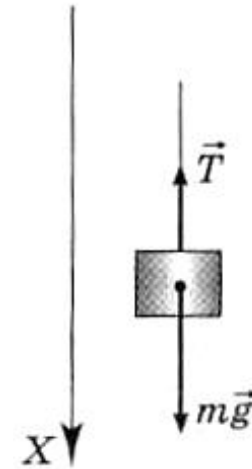
$$T_{\text{н max}} < mg = 441 \text{ Н.}$$

На груз действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

$$ma_x = mg - T$$

$$a = \frac{mg - T}{m} = 0,67 \text{ м / с}^2.$$



**Задача 2.** Два тела массами 200 г и 100 г соединены друг с другом нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения равен 0,2;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ . Определите силу натяжения нити и ускорение тел.

**Решение.**

$$m_1 g \sin \beta > m_2 g \sin \alpha$$

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{T1} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1}$$

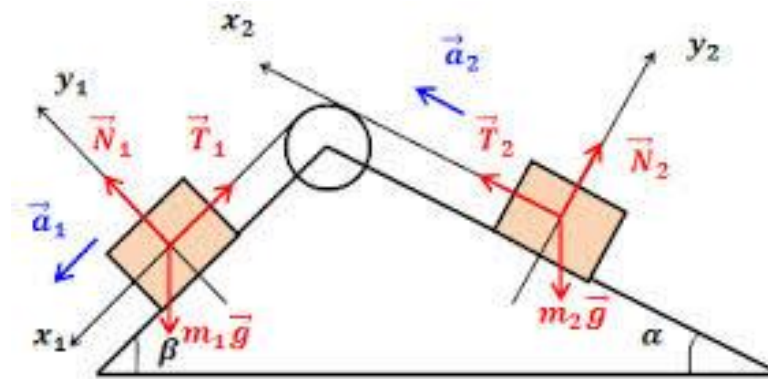
$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{T2} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}$$

На ось  $OX_1$  :

$$m_1 a_{1x} = m_1 g \sin \beta - T_1 - F_{\text{тр}1}$$

На ось  $OX_2$  :

$$m_2 a_{2x} = m_2 g \sin \alpha - T_2 - F_{\text{тр}2};$$



на ось  $OY_1$  :

$$0 = N_1 - m_1 g \cos \beta$$

на ось  $OY_2$  :

$$0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha$$

$$T_1 = T_2 = T; \quad a_1 = a_2 = a.$$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \beta - T - \mu_1 m_1 g \cos \beta \\ m_2 a = T - m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha \end{cases}$$

$$a = g \frac{(m_1 \sin \beta - m_2 \sin \alpha) - (\mu_1 m_1 \cos \beta + \mu_2 m_2 \cos \alpha)}{m_1 + m_2};$$

$$T = m_1 m_2 g \frac{(\sin \beta - \sin \alpha) - (\mu_1 \cos \beta + \mu_2 \cos \alpha)}{m_2 + m_1}.$$

**Задача 3.** Два тела массами 200 г и 100 г соединены друг с другом нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения равен 0,2,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ . **Масса блока равна 200 г.** Определите силу натяжения нити и ускорение тел.

**Решение.**

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{\text{т1}} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр1}}$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{т2}} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр2}}$$

$$I \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

На ось  $OX_1$  :

$$m_1 a_{1x} = m_1 g \sin \beta - T_1 - F_{\text{тр1}}$$

На ось  $OX_2$  :

$$m_2 a_{2x} = m_2 g \sin \alpha - T_2 - F_{\text{тр2}};$$

На ось  $OZ$  :  $\frac{mr^2}{2} \frac{a}{r} = (T_1 - T_2) r$

на ось  $OY_1$  :

$$0 = N_1 - m_1 g \cos \beta.$$

на ось  $OY_2$  :

$$0 = N_2 - m_2 g \cos \alpha$$

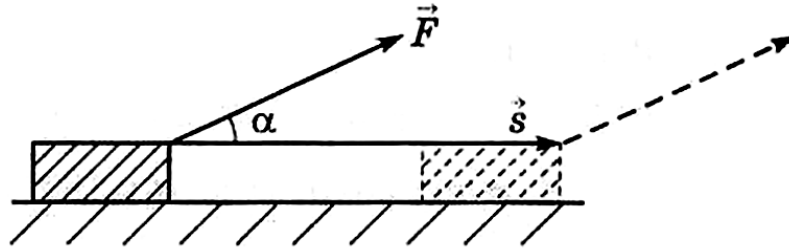
$$a_1 = a_2 = a.$$

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g \sin \beta - T_1 - \mu_1 m_1 g \cos \beta \\ m_2 a = -m_2 g \sin \alpha + T_2 - \mu_2 m_2 g \cos \alpha \\ \frac{ma}{2} = T_1 - T_2 \end{cases}$$

$$a = g \frac{(m_1 \sin \beta - m_2 \sin \alpha) - (\mu_1 m_1 \cos \beta + \mu_2 m_2 \cos \alpha)}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}};$$

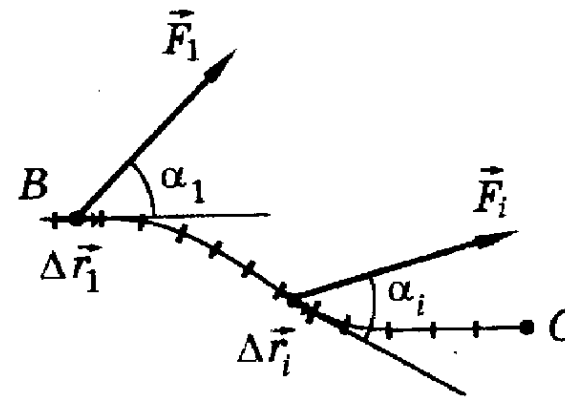
# Механическая работа

$$A = (\vec{F} \vec{s}) = F s \cos \alpha$$



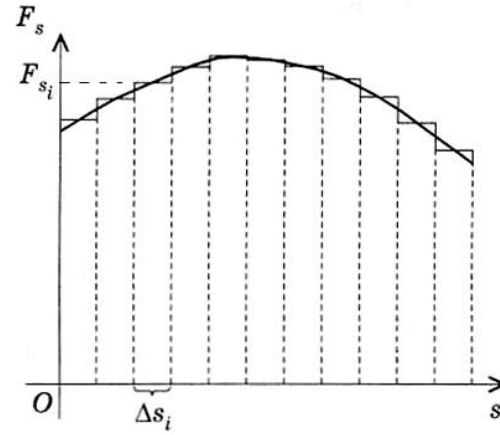
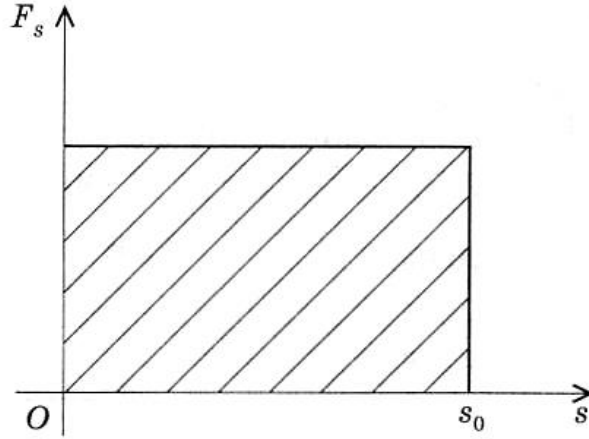
Если сила переменная или траектория – кривая линия, то рассчитываем работу на элементарном перемещении  $\Delta \vec{s}_i$

$$\Delta A_i = F_i \Delta s_i \cos \alpha_i = F_{is} \Delta s_i$$

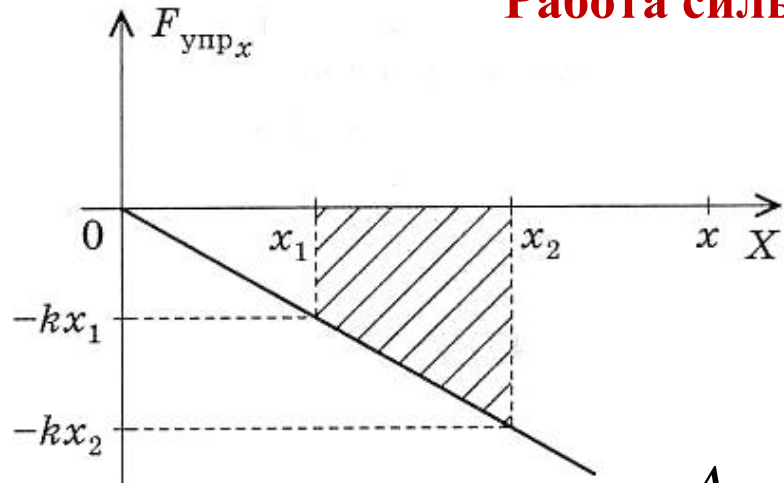




## Расчет работы по графику



## Работа силы упругости

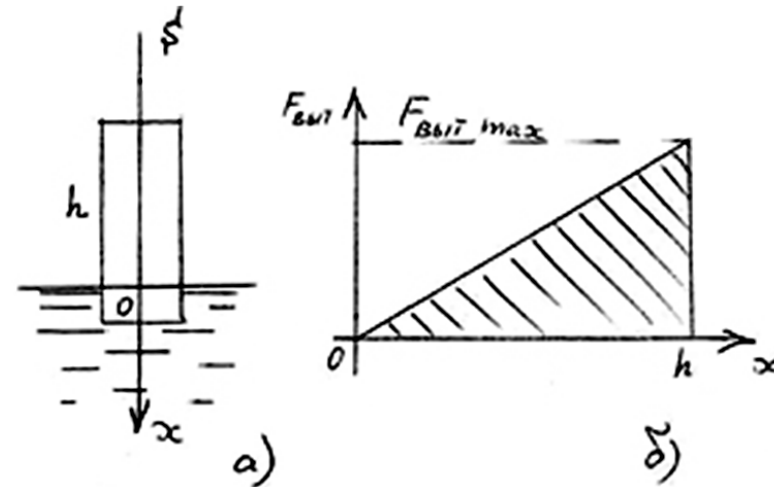


$$A = -\left(\frac{kx_1 + kx_2}{2}\right)(x_2 - x_1) = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$$

**Задача 1.** Бревно высотой  $h$  и площадью поперечного сечения  $S$  погружают в воду в вертикальном положении. Определите работу, которую совершила выталкивающая сила при полном погружении бревна. Силой сопротивления пренебречь.

**Решение.** Выталкивающая сила равна  $F_{\text{выт}} = \rho_{\text{в}} g S x$ , где  $x$  – глубина погружения бревна.  $0 < F_{\text{выт}} < \rho_{\text{в}} g S h$ .

$$A = - F_{\text{выт max}} h/2 = - \rho_{\text{в}} g S h^2/2.$$



## Закон сохранения импульса ( $F_{en} = 0$ )

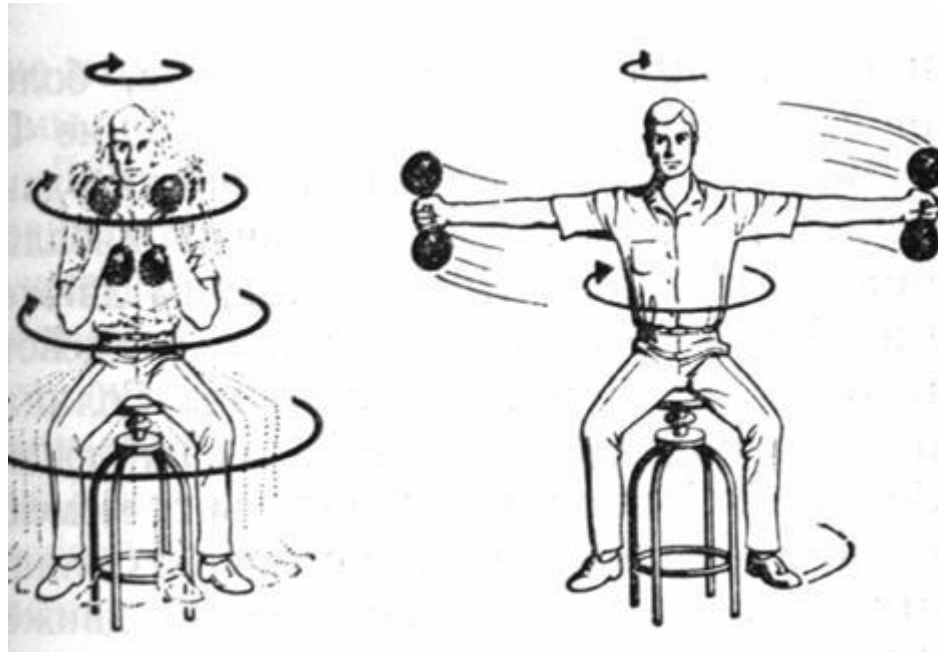
$$\vec{p} = \text{const}$$

$$F_{enx} = 0 \rightarrow p_x = \text{const}$$

## Закон сохранения момента импульса ( $M_{en} = 0$ )

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$L_z = \text{const}$$



## Закон сохранения энергии (консервативные системы тел)

Для тела

$$\Delta(E_k + E_n) = 0 \rightarrow E_k + E_n = \text{const.}$$

Для системы тел

Механическая энергия **системы** сохраняется, если работа внешних сил, действующих на тела, входящие в систему, равна нулю и отсутствуют силы трения, т.е. нет перехода механической энергии в другие виды энергии:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{п}} + E_{\text{к}} = \text{const.}$$

В замкнутых системах, в которых действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется.

**Задача 4.** Мальчик массой  $m$  скатывается со скоростью  $v_1$  на санках массой  $M$  с горы, имеющей уклон ( $\cos\alpha = 8/9$ ). Другой мальчик той же массы догоняет санки и прыгает в них. В начале прыжка скорость мальчика направлена под углом  $\gamma$  ( $\cos\gamma = 7/9$ ). В результате санки с мальчиками движутся со скоростью  $v$ . Определите скорость второго мальчика.

**Решение.**

$$p_{1x} = (m + M)v_1 \cos\alpha + mv_2 \cos\gamma$$

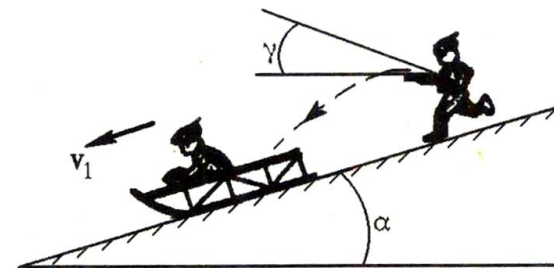
$$p_{2x} = (2m + M)v \cos\alpha$$

$$(m + M)v_1 \cos\alpha + mv_2 \cos\gamma = (2m + M)v \cos\alpha$$

$$mv_2 \cos\gamma = [(2m + M)v - (m + M)v_1] \cos\alpha$$

$$v_2 = \frac{[(2m + M)v - (m + M)v_1] \cos\alpha}{m \cos\gamma}$$

$$\frac{[(2m + M)v - (m + M)v_1] \cos\alpha}{m \cos\gamma} = \frac{8}{7} \frac{(2m + M)v - (m + M)v_1}{m}.$$



**Задача 5.** Человек массой 80 кг начинает идти по краю платформы карусели со скоростью 4 м/с. Определите угловую скорость вращения карусели. Радиус карусели 5 м, масса 400 кг.

**Решение.**

$$mR^2v - I\omega = 0$$

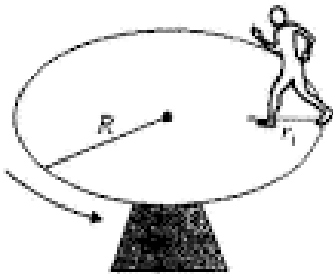
$$v = v_{\text{отн}} - \omega R$$

$$mR^2(v_{\text{отн}} - \omega R) = I\omega$$

$$\omega = \frac{mR^2v_{\text{отн}}}{mR^2 + I} \quad I = \frac{MR^2}{2}$$

**Задача 6.** Человек переходит от края платформы к середине, масса человека в 3 раза меньше массы платформы. Определите во сколько раз увеличилась угловая скорость вращения платформы.

**Решение.**



$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}R^2 = \frac{5}{6}mR^2$$

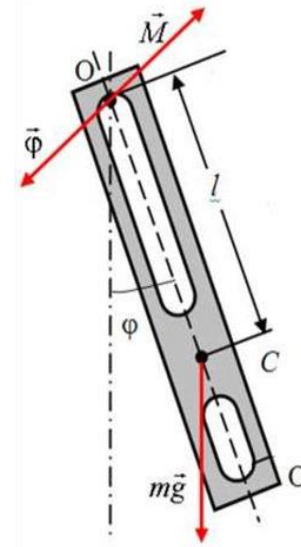
$$J_2 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mR^2$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5}{6}mR^2 \frac{12}{7mR^2} = \frac{10}{7} = 1,43$$

**Задача 7.** Доска, момент инерции которой равен  $I$ , отклонена на угол  $\varphi$ . Определите угловую скорость доски, когда она проходит положение равновесия. Масса доски –  $m$ , расстояние от центра тяжести до оси вращения равно  $l$ .

**Решение.**

$$\frac{I\omega^2}{2} = mgl(1 - \cos \varphi)$$
$$\omega = \sqrt{2mgl(1 - \cos \varphi) / I}$$



**Задача 8.** На нити длиной 2 м висит небольшой ящик с песком массой 2 кг. Пуля, летящая горизонтально, попадает в ящик и застревает в нем, при этом максимальное отклонение нити составляет  $30^\circ$ . Определите скорость пули, если масса пули 10 г. (Это устройство называется *баллистическим маятником* и использовалось раньше для определения скорости пуль.) Размеры ящика существенно меньше длины нити.

**Решение.**

$$m_0 v_0 = (m_0 + m)v$$

$$E_{кА} = (m + m_0)v^2 / 2$$

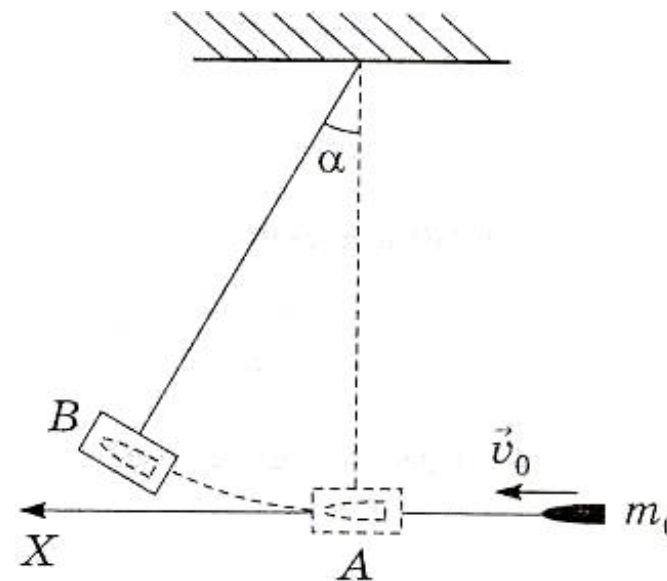
$$E_{пВ} = (m + m_0)gh$$

$$h = l - l \cos \alpha$$

$$(m + m_0)v^2 / 2 = (m + m_0)gl(1 - \cos \alpha)$$

$$v = \sqrt{gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$v_0 = \frac{m_0 + m}{m_0} \sqrt{gl(1 - \cos \alpha)} = 350 \text{ м / с.}$$





**Задача 9.** Определите скорости двух шаров массами  $m_1$  и  $m_2$  после прямого абсолютно упругого удара.

**Решение.**

**Абсолютно упругий удар** – это взаимодействие, в результате которого механическая энергия сохраняется. *Прямым ударом* называется удар, при котором векторы скорости лежат на линии, соединяющей центры шаров.

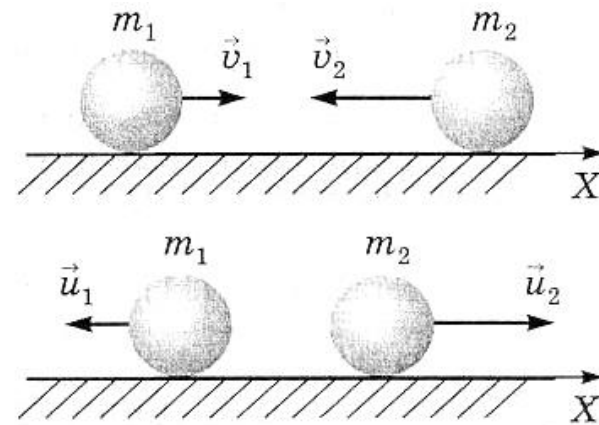
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (1)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \quad (2)$$

$$m_1 (v_1 + u_1) = m_2 (v_2 + u_2) \quad (3)$$

$$m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \quad (4)$$

$$v_1 \neq -u_1, v_2 \neq -u_2$$



$$v_1 - u_1 = u_2 - v_2$$

$$u_2 = v_1 + v_2 - u_1$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 (v_1 + v_2) - m_2 u_1$$

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$m_1 = m_2$$

$$u_1 = v_2, u_2 = v_1$$

**Задача 10.** Между двумя телами массами 1 кг и 2 кг, расположенными на плоской поверхности, находится сжатая пружина. После освобождения пружины первое тело прошло до остановки 0,5 м. Найдите начальную скорость второго тела, если коэффициент трения равен 0,2. Силой трения в момент освобождения пружины пренебречь.

**Решение.**

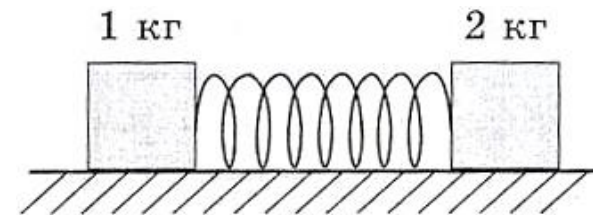
$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$0 - \frac{m_1 v_1^2}{2} = -\mu m_1 g l_1$$

$$v_1 = \sqrt{2\mu g l_1}$$

$$v_2 = \frac{m_1 \sqrt{2\mu g l_1}}{m_2}.$$



**Задача 11.** Цилиндр радиусом  $R$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega$ , положили в угол между стеной и полом таким образом, что его боковая поверхность их касается. Коэффициент трения между цилиндром и полом равен  $\mu_1$ , между цилиндром и стеной равен  $\mu_2$ . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

**Решение.**

$$I = \frac{mR^2}{2}$$

$$0 - \frac{m\omega^2 R^2}{4} = -F_{mp1} 2\pi R n - F_{mp2} 2\pi R n$$

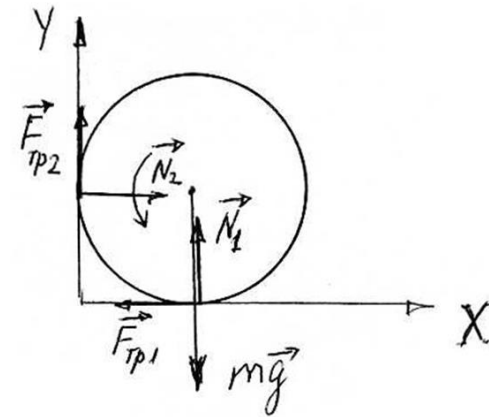
$$0 = N_2 - F_{mp1} \Rightarrow N_2 = \mu_1 N_1$$

$$0 = N_1 + F_{mp2} - mg \Rightarrow N_1 + \mu_2 \mu_1 N_1 = mg$$

$$N_1 = \frac{mg}{1 + \mu_2 \mu_1} \quad N_2 = \mu_1 \frac{mg}{1 + \mu_2 \mu_1}$$

$$F_{tp1} = \mu_1 \frac{mg}{1 + \mu_2 \mu_1} \quad F_{tp2} = \mu_1 \mu_2 \frac{mg}{1 + \mu_2 \mu_1}$$

$$n = \frac{\omega^2 R (1 + \mu_1 \mu_2)}{8\pi g \mu_1 (1 + \mu_2)}$$



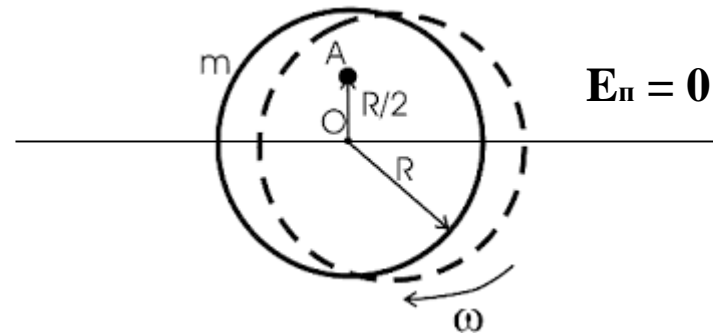
**Задача 12.** Сплошной диск, массой  $m$  и радиусом  $R$  отклонили на угол  $90^\circ$ .  
Чему будет равна угловая скорость диска в момент, когда он проходит положение равновесия?

**Решение.**

$$I = I_0 + m \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4} m R^2$$

$$mg \frac{R}{2} = \frac{I \omega^2}{2}$$

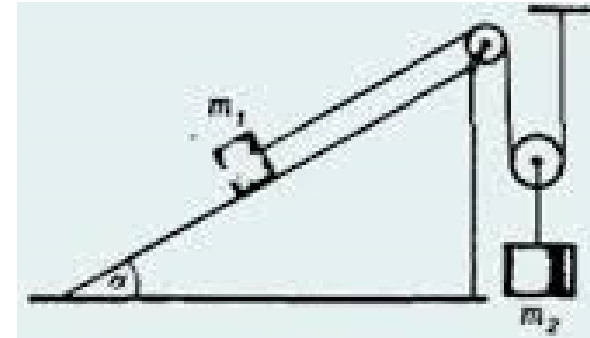
$$mg \frac{R}{2} = \frac{\frac{3}{4} m R^2 \omega^2}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$$



## Задачи для самостоятельного решения

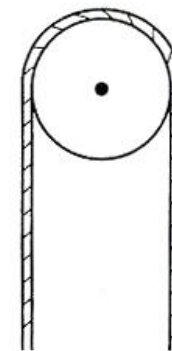
**1.** Определите ускорение тел.

Массы первого и второго тел равны 2 кг, массы блоков равны 1 кг, угол у основания наклонной плоскости равен  $30^\circ$ .



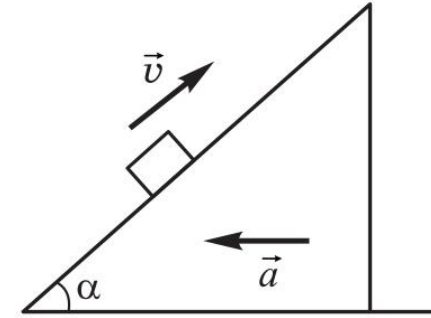
**2.** Определите, какую угловую скорость надо сообщить стержню, закрепленному за один конец, чтобы он сделал полный оборот.

**3.** Через блок перекинута веревка таким образом, что ее висящие концы одинаковы по длине. При небольшом смещении она начинает соскальзывать с блока. Чему равна скорость веревки в тот момент, когда она полностью соскользнет с блока? Длина веревки  $l$ , трением пренебречь.



4. С каким ускорением должен двигаться клин с углом у основания  $\alpha$ , чтобы груз, лежащий на нем, поднимался вверх?

Коэффициент трения равен  $\mu$ .



5. Диск массой 1 кг радиусом 20 см расположен на горизонтальной оси вращения. В край диска попадает пуля массой 10 г, летящая со скоростью 200 м/с, и застревает в нем. Определите угловую скорость вращения диска после попадания в него пули.

6. На диск намотана нить, к одному концу которой привязан груз массой 2 кг. Масса и радиус диска 400 г и 20 см.

Определите, за какое время груз спустится на высоту 1 м.

